Поле тензора Λ^{J}_{jK} определяет операцию λ -свертки [2] с векторными полями $x\,(x^i)$, $y\,(y^i)$:

$$\lambda_x y = \lambda_y x = \Lambda^{J}_{jK} x^j y^K \bar{e}_J = \Lambda^{i}_{jK} x^j y^K \bar{e}_i + \Lambda^{n}_{ij} x^i y^j \bar{e}_n .$$

λ -свертка удовлетворяет свойствам:

1. $\lambda_x y = \lambda_y x = d_y\left(f'(x)\right) - f'\left(d_y(x)\right)$,

где $d_y x = (dx^J + x^K \omega^J_K)\bar{e}_J$, $\omega^J = y^J \theta$.

2.Для направлений x ,принадлежащих характеристическому конусу, $\lambda_x x \in \Delta_{n-1}$.

3.Для любого $x \in A_n$, $y \in L_1$, $\lambda_x y \in \Delta_{n-1}$.

Библиографический список

1.А л ш и б а я Э.Д. К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве: Тр. Геометр.семинара / ВИНИТИ АН СССР.- М.,1974.Т.5.С.169-193.

2.Б а з ы л е в В.Т.,Кузьмин М.К.,Столяров А.В. Сети на многообразиях: Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР.- М.,1980.Т.12.С.97-125.

3.Р ы ж к о в В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n : Тр.Геометр. семинара / ВИНИТИ АН СССР.-М.,1971.Т.3.С.235-242.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17. 1986

УДК 514.75

СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИЯХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПРОСТРАНСТВОМ КВАДРИК

Ю.И.Ш е в ч е н к о

Пространство квадрик в проективном пространстве является тензорным расслоением с базой - многообразием Грассмана.Рассматривается расслоение линейных реперов, принадлежащих плоскостям базы,и его объединение с тензорным расслоением над общей базой.Это объединение оказывается главным расслоением.В указанных расслоениях заданы соответствующие связности с помощью оснащения Бортолотти и его обобщения.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_J\}$,деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_J = \omega^{j}_{J} A_j \qquad (J, j, K = \overline{0,n}), \qquad (1)$$

где ω^j_J -инвариантные формы линейной группы $GL(n+1)$, действующей в пространстве P_n неэффективно.Эти формы удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$d\omega^{j}_{J} = \omega^{K}_{J} \wedge \omega^{j}_{K} . \qquad (2)$$

Проективная группа $GP(n) \subset GL(n+1)$ выделяется условием проективности $\omega^J_J = 0$.

В пространстве P_n рассмотрим предварительно многообразие Грассмана $G_r(m,n)$. Поместим вершины A_α репера $\{A_J\}$ в образующую m-плоскость L_m и запишем для них формулы (1):

$$dA_\alpha = \omega^{\beta}_{\alpha} A_\beta + \omega^{i}_{\alpha} A_i \quad (\alpha, \beta, \ldots = \overline{0,m} \;;\; i,j = \overline{m+1,n}).$$

Отсюда получаются уравнения стационарности плоскости L_m: $\omega^i_\alpha = 0$. Исходя из уравнений (2), запишем внешние дифференциалы главных форм ω^i_α многообразия Грассмана

$$d\omega^i_\alpha = \omega^j_\beta \wedge \omega^{i\beta}_{\alpha j} \qquad (\omega^{i\beta}_{\alpha j} = \delta^\beta_\alpha \omega^i_j - \delta^i_j \omega^\beta_\alpha) \tag{3}$$

Теперь проективную группу можно рассматривать как расслоение $GP(n) = G(B)$, базой которого является многообразие Грассмана $B = G_r(m,n)$, а типовым слоем - группа стационарности $G \subset GP(n)$ плоскости L_m. Расслоение $G(B)$ содержит, в частности, подрасслоение [1] линейных реперов со структурными уравнениями (3) и следующими:

$$d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \omega^i_\alpha \wedge \omega^\beta_i. \tag{4}$$

Базой этого подрасслоения служит B, а типовым слоем - линейная группа $GL(m+1) \subset G$. Фундаментально-групповая связность в расслоении линейных реперов задается по Лаптеву [2, с.83] с помощью поля объекта связности на базе B:

$$\nabla \Gamma^{\beta\gamma}_{\alpha i} + \delta^\gamma_\alpha \omega^\beta_i = \Gamma^{\beta\gamma\eta}_{\alpha i j} \omega^j_\eta, \tag{5}$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla \Gamma^{\beta\gamma}_{\alpha i} = d\Gamma^{\beta\gamma}_{\alpha i} - \Gamma^{\beta\gamma}_{\alpha j}\omega^j_i - \Gamma^{\beta\gamma}_{\eta i}\omega^\eta_\alpha + \Gamma^{\eta\gamma}_{\alpha i}\omega^\beta_\eta + \Gamma^{\beta\eta}_{\alpha i}\omega^\gamma_\eta.$$

Т е о р е м а 1. Оснащение Бортолотти многообразия Грассмана позволяет задать связность в расслоении линейных реперов, принадлежащих плоскостям этого многообразия.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Под оснащением Бортолотти многообразия Грассмана $G_r(m,n)$ понимается присоединение к каждой его плоскости L_m дополнительной $(n-m-1)$ -плоскости B_{n-m-1}, не пересекающейся с плоскостью L_m. Зададим ее точками $B_i = A_i + \lambda^\alpha_i A_\alpha$, где функции λ^α_i удовлетворяют уравнениям $\nabla \lambda^\alpha_i + \omega^\alpha_i = \lambda^{\alpha\beta}_{ij}\omega^j_\beta$. Оснащающий квазитензор λ^α_i дает возможность охватить объект связности по формуле [1, с. 130]:

$$\Gamma^{\beta\gamma}_{\alpha i} = \delta^\gamma_\alpha \lambda^\beta_i. \tag{6}$$

В пространстве P_n рассмотрим пространство R $(m-1)$-мерных квадрик Q_{m-1}. Каждая квадрика Q_{m-1} лежит в некоторой плоскости L_m, поэтому пространство R индуцирует многообразие Грассмана $G_r(m,n)$. Учитывая предыдущие построения, зададим квадрику Q_{m-1} системой уравнений

$$x^i = 0, \quad F \overset{df}{=} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0 \quad (a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}), \tag{7}$$

где первая подсистема определяет индуцированную плоскость L_m. Возьмем на плоскости L_m произвольную точку $P = x^\alpha A_\alpha$ и потребуем ее неподвижности при действии в пространстве P_n группы G. Тогда в плоскости L_m действует линейная группа $GL(m+1)$ и условие относительной стационарности точки P имеет вид

$$\bar{d}x^\alpha + x^\beta \bar{\omega}^\alpha_\beta = x^\alpha \bar{\vartheta}, \tag{8}$$

где ϑ -некоторая линейная форма, а черта означает фиксацию плоскости L_m:

$$\bar{d} = d\Big|_{\omega^i_\alpha = 0}, \quad \bar{\omega}^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta\Big|_{\omega^i_\alpha = 0}, \quad \bar{\vartheta} = \vartheta\Big|_{\omega^i_\alpha = 0}.$$

Дифференцируя левую часть последнего уравнения системы (7) с использованием уравнений (8), получим $\bar{d}F = 2\bar{\vartheta}F + \bar{\nabla} a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta$; требуя, чтобы правая часть этого равенства была пропорциональна F, получим $\bar{\nabla} a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}\bar{\omega}$, где ω -линейная форма. Последние равенства эквивалентны следующим:

$$\omega^i_\alpha = 0, \quad \Delta a_{\alpha\beta} \overset{df}{=} \nabla a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}\omega = 0, \tag{9}$$

представляющим собой уравнения стационарности квадрики Q_{m-1}. Дифференцируя внешним образом вторую подсистему системы (9), получим

$$\omega_i^\gamma \wedge (a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^i + a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^i) - a_{\alpha\beta}\, d\omega = 0.$$

Если $\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$, то существует матрица $(a^{\alpha\beta})$, обратная к матрице $(a_{\alpha\beta})$. Умножая последнее равенство на $a^{\alpha\beta}$ и свертывая по индексам α и β, найдем $d\omega = \frac{2}{m+1}\omega_i^\gamma \wedge \omega_\gamma^i$. Значит, можно положить

$$\omega = -\frac{2}{m+1}\omega_\gamma^\gamma. \qquad (10)$$

Отметим, что такой выбор формы ω производится В.С.Малаховским [3] за счет условия $\det(a_{\alpha\beta}) = 1$. Если квадрика Q_{m-1} вырождена, то при необходимости будем выбирать форму ω в том же виде (10).

Из уравнений (9) следует, что главными формами пространства R являются формы ω_α^i, $\Delta a_{\alpha\beta}$, которые удовлетворяют уравнениям (3) и следующим:

$$d\Delta a_{\alpha\beta} = \omega_\alpha^\gamma \wedge \Delta a_{\gamma\beta} + \omega_\beta^\gamma \wedge \Delta a_{\alpha\gamma} + \omega \wedge \Delta a_{\alpha\beta} + \omega_\gamma^i \wedge \omega_{\alpha\beta i}^\gamma, \qquad (11)$$

где

$$\omega_{\alpha\beta i}^\gamma = \frac{2}{m+1} a_{\alpha\beta}\omega_i^\gamma - (\delta_\alpha^\gamma a_{\eta\beta} + \delta_\beta^\gamma a_{\alpha\eta})\omega_i^\eta.$$

Обозначим через R_0 подпространство пространства R, состоящее из тех квадрик Q_{m-1}, которые лежат в одной плоскости L_m. Пространство R представляет из себя расслоение $R = R_0(B)$ [3, с.237] со структурными уравнениями (3), (11). Расслоение $R_0(B)$ является пространством тензорных опорных элементов с плоскостной базой $B = G_r(m,n)$ [4]. Линейная дифференциально-геометрическая связность задается в расслоении $R_0(B)$ по В.И.Близникасу [5, с.196] с помощью поля объекта на этом расслоении:

$$\nabla L_{\alpha\beta i}^\gamma - L_{\alpha\beta i}^\gamma \omega + \omega_{\alpha\beta i}^\gamma = L_{\alpha\beta ij}^{\gamma\eta}\omega_\eta^j + L_{\alpha\beta i}^{\gamma\eta\xi}\Delta a_{\eta\xi}. \qquad (12)$$

Если выполняются равенства $L_{\alpha\beta i}^{\gamma\eta\xi} = 0$, то будем говорить, что объект $L_{\alpha\beta i}^\gamma$ определяет суженную связность в расслоении $R_0(B)$.

О п р е д е л е н и е. Оснащением пространства R назовем присоединение к каждой квадрике Q_{m-1} $(n-m-1)$-мерной плоскости P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с индуцированной плоскостью L_m.

Это оснащение, обобщающее оснащение Бортолотти, задается совокупностью точек $C_i = A_i + \mu_i^\alpha A_\alpha$, причем

$$\nabla\mu_i^\alpha + \omega_i^\alpha = \mu_{ij}^{\alpha\beta}\omega_\beta^j + \mu_i^{\alpha\beta\gamma}\Delta a_{\beta\gamma}.$$

Т е о р е м а 2. Оснащение пространства квадрик дает возможность задать в нем линейную дифференциально-геометрическую связность.

Доказательство состоит в охвате объекта связности $L_{\alpha\beta i}^\gamma$ функциями $a_{\alpha\beta}$, определяющими текущую квадрику $Q_{m-1} \in R$, и оснащающим квазитензором μ_i^α по формуле

$$L_{\alpha\beta i}^\gamma = \frac{2}{m+1} a_{\alpha\beta}\mu_i^\gamma - (\delta_\alpha^\gamma a_{\eta\beta} + \delta_\beta^\gamma a_{\alpha\eta})\mu_i^\eta. \qquad (13)$$

Т е о р е м а 3. Сечение расслоения $R_0(B)$ позволяет задать в нем суженную связность непосредственно (без помощи оснащения); если образующая квадрика Q_{m-1} невырождена, то это сечение порождает оснащение Бортолотти базы B.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сечение расслоения $R_0(B)$ определяется уравнениями $\Delta a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta i}^\gamma \omega_\gamma^i$, которые являются уравнениями $(m+1)(n-m)$-мерного невырожденного многообразия квадрик. Продолжая эти уравнения, получим

$$\nabla a_{\alpha\beta i}^\gamma - a_{\alpha\beta i}^\gamma\omega + \omega_{\alpha\beta i}^\gamma = a_{\alpha\beta ij}^{\gamma\eta}\omega_\eta^j,$$

откуда следует, что $L_{\alpha\beta i}^\gamma = a_{\alpha\beta i}^\gamma$ есть объект суженной связности. Если $\det(a_{\alpha\beta}) \neq 0$, то сечение позволяет построить оснащение Бортолотти:

$$\lambda_i^\alpha = -\frac{m+1}{m(m+3)} a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma i}^\gamma.$$

Исследуем главное расслоение $K(B)$ со структурными уравнениями (3), (4), (11), в которых используется формула (10). Базой расслоения $K(B)$ служит многообразие

Грассмана $B = Gr(m,n)$, а типовым слоем-группа Ли $K = R_0 \cup Gl(m+1)$. Группу K и расслоение $K(B)$ будем называть квадратичными. Действие квадратичной группы K сводится к действиям линейной группы $GL(m+1)$ на плоскости L_m и в подпространстве R_0. Фундаментально-групповая связность в квадратичном расслоении $K(B)$ задается с помощью объекта $\Gamma = (\Gamma^{\beta\gamma}_{\alpha i}, \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta i})$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям (5) и следующим:

$$\nabla\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta i} + \frac{2}{m+1}(\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta i}\omega^{\eta}_{\eta} - \Gamma^{\eta\gamma}_{\eta i}\Delta a_{\alpha\beta}) + \omega^{\gamma}_{\alpha\beta i} + \Gamma^{\eta\gamma}_{\alpha i}\Delta a_{\eta\beta} + \Gamma^{\eta\gamma}_{\beta i}\Delta a_{\alpha\eta} = \Gamma^{\gamma\eta}_{\alpha\beta i j}\omega^{j}_{\eta}. \qquad (14)$$

Сравнивая уравнения (12) и (14), видим, что их можно отождествить, когда

$$L^{\gamma\eta\xi}_{\alpha\beta i} = \frac{2}{m+1}\delta^{\eta}_{\alpha}\delta^{\xi}_{\beta}\Gamma^{\zeta\gamma}_{\zeta i} - \delta^{\xi}_{\alpha}\Gamma^{\eta\gamma}_{\beta i} - \delta^{\xi}_{\beta}\Gamma^{\eta\gamma}_{\alpha i}. \qquad (15)$$

Запишем продолжение $L^{\gamma\eta\xi}_{\alpha\beta i}$ объекта $L^{\gamma}_{\alpha\beta i}$, соответствующее охвату (13):

$$L^{\gamma\eta\xi}_{\alpha\beta i} = \frac{2}{m+1}(\delta^{\eta}_{\alpha}\delta^{\xi}_{\beta}\mu^{\gamma}_{i} + a_{\alpha\beta}\mu^{\gamma\eta\xi}_{i}) - (\delta^{\xi}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta} + \delta^{\xi}_{\beta}\delta^{\gamma}_{\alpha})\mu^{\eta}_{i} - (\delta^{\gamma}_{\beta}a_{\alpha\zeta} + \delta^{\gamma}_{\alpha}a_{\zeta\beta})\mu^{\zeta\xi\eta}_{i} \qquad (16)$$

Если $\mu^{\alpha\beta\gamma}_{i} = 0$, то можно считать $\mu^{\alpha}_{i} = \lambda^{\alpha}_{i}$, тогда формулы (15) и (16) совпадают с учетом охвата (6), значит, справедлива

Т е о р е м а 4. Оснащение Бортолотти базы B квадратичного расслоения $K(B)$ дает возможность задать в нем фундаментально-групповую связность.

Библиографический список

1. Б л и з н и к е н е И.В. О геометрии полуголономной конгруэнции первого рода: Тр. Геометр. семинара | ВИНИТИ АН СССР.-М., 1971, Т.3. С.125-148.

2. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях | Л.Е. Е в т у ш и к и др.: Проблемы геометрии | ВИНИТИ АН СССР.-М., 1979. Т.9. С.1-247.

3. М а л а х о в с к и й В.С. Многообразия p-мерных квадрик в n-мерном проективном пространстве: Тр. I республ. конф. матем. Белоруссии | БГУ.-Минск, 1965. С.233-246.

4. Б л и з н и к е н е И.В. О геометрии секущей поверхности одного класса пространств тензорных опорных элементов с линейчатой базой: Литовский матем. сб. | АН ЛитССР.-Вильнюс, 1969. Т.9, №2. С.233-242.

5. Б л и з н и к а с В.И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов: Литовский матем. сб. | АН ЛитССР.-Вильнюс, 1966. Т.6. № 2. С.141-209.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.17 1986

УДК 514.75

ПОЛЕ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, АССОЦИИРОВАННОЕ С $M(\Lambda)$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Н.М. Ш е й д о р о в а

В работе продолжается изучение $M(\Lambda)$-распределений проективного пространства P_n [4]. Показано, что с $M(\Lambda)$-распределением в первой дифференциальной окрестности инвариантно ассоциируется трехсоставное распределение $\mathcal{H}(M(\Lambda))$[3]. Используется следующая схема индексов:

$$\mathcal{K} = \overline{1,n};\quad \xi,\eta,\zeta = \overline{1,n-1};\quad p,q = \overline{1,r};\quad a,b,c,f = \overline{1,m};$$
$$i,k = \overline{r+1,m};\quad \alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n};\quad \hat{\alpha},\hat{\beta} = \overline{m+1,n-1};\quad u,v = \overline{r+1,n}.$$

Оператор ∇ определим формулой, введенной в работе [1].

1. Рассмотрим распределение $M(\Lambda) \subset P_n$ в репере $\mathcal{R}^0$ [4]. Гиперплоскость H, проходящую через центр A_0, определим точками $P_\xi = A_\xi + X^n_\xi A_n$. Условия стационарности гиперплоскости H имеют вид:

$$\delta X^n_\xi + X^n_\xi\bar{\omega}^n_n - X^n_\eta\bar{\vartheta}^\eta_\xi + \bar{\omega}^n_\xi = 0, \qquad (1)$$

где

$$\bar{\vartheta}^\eta_\xi = \bar{\omega}^\eta_\xi + X^n_\xi\bar{\omega}^\eta_n, \quad \mathcal{D}\bar{\vartheta}^\eta_\xi = \bar{\vartheta}^\zeta_\xi \wedge \bar{\vartheta}^\eta_\zeta.$$

Требование $M \subset H$ с тем же центром A_0 приводит к равенствам

$$X^n_a = M^n_a - M^{\hat{\alpha}}_a X^n_{\hat{\alpha}}. \qquad (2)$$

Трехсоставное распределение $H(M(\Lambda))$ в репере $\mathcal{R}^0$ определяется следующей системой дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} &d\Lambda^u_p - \Lambda^u_q\theta^q_p + \Lambda^v_p\omega^u_v + \omega^u_p = \Lambda^u_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0, \\ &dM^\alpha_i - M^\alpha_k\theta^k_i - M^\alpha_p\theta^p_i + M^\beta_i\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_i = M^\alpha_{i\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_0, \\ &dX^n_{\hat{\alpha}} - X^n_{\hat{\beta}}\vartheta^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} - X^n_a\vartheta^a_{\hat{\alpha}} + X^n_{\hat{\alpha}}\omega^n_n + \omega^n_{\hat{\alpha}} = X^n_{\hat{\alpha}\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где

$$M^\alpha_p = \Lambda^\alpha_p - \Lambda^i_p M^\alpha_i, \quad X^n_a = M^n_a - M^{\hat{\alpha}}_a X^n_{\hat{\alpha}}.$$